Topologia
Lista 3

Zad 1. Pokazać, że p jest punktem izolowanym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór otwarty G taki, że $G \cap A = \{p\}$.

Zad 2. Wyznaczyć wszystkie punkty izolowane zbioru dodatnich liczb parzystych na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ oraz w przestrzeni z zadania 7a) z listy 0.

Zad 3. Wykazać, że

a) każdy podzbiór otwarty przestrzeni w sobie gęstej jest w sobie gęsty,

b) jeśli A i $X \setminus A$ są brzegowe, to przestrzeń X jest w sobie gęsta,

c) zbiór $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Fr}(A))$ jest w sobie gęsty.

Zad 4. Dowieść, że zbiór A jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego zbioru otwartego U istnieje niepusty podzbiór otwarty V zbioru U taki, że $V \cap A = \emptyset$.

Zad 5. Dowieść, że zbiór nigdziegęsty jest brzegowy, a zbiór domknięty i brzegowy jest nigdziegęsty.

Zad 6. Czy istnieje niepusty zbiór nigdziegęsty i otwarty?

Zad 7. Udowodnić, że suma skończonej ilości zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem nigdziegęstym. Czy można uogólnić to twierdzenie na przypadek sum nieskończonych?

Zad 8. Udowodnić, że

a) dopełnienie zbioru F_σ jest zbiorem G_δ,

b) suma przeliczalnej ilości zbiorów F_σ jest zbiorem F_σ,

c) skończony iloczyn zbiorów F_σ jest zbiorem F_σ,

d) sformułować i wykazać twierdzenia o zbiorach G_δ dwoiste do a), b), c).

Zad 9. Pokazać, że odcinki $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ są jednocześnie zbiorami F_σ i G_δ.

Zad 10. Sprawdzić, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną i $A \subset X$, to rodzina $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ jest topologią (tzw. *topologią indukowaną*) na A.

Zad 11. Niech X będzie wyposażony w topologię indukowaną z prostej euklidesowej $\mathbb{R}$.

a) Niech $X = [0, 1]$. Które ze zbiorów $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = (\frac{1}{3}, 1]$, $A_4 = (0, 1)$ są domknięte, a które otwarte w X?

b) Niech $X = \mathbb{N}$. Wypisać topologię na X.

c) Niech $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Wyznaczyć wszystkie otwarto-domknięte zbiory jednoelementowe.